ホロノミック量子計算の提案:
ダイマー鎖モデル

日本物理学会 第62回年次大会　＠近畿大学

坂東将光[A]

太田幸宏[B], 近藤康[A], 中原幹夫[A]

近大理工[A], 近大総合理[B]

26aRF-10

目的

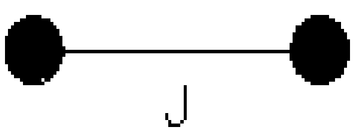
ホロノミック量子計算の物理系での実装を目指す

ホロノミック量子計算 ⇒

- 数学的に面白い
- ノイズに強いと期待

- スピン鎖モデルでの実装: (現実的な物理系での提案 !!)

Karimipour and Majd, Phys. Rev. A **72**, 052305 (2005).



核スピン

⇒ $|0\rangle, \ |1\rangle$ ⇒ 量子ゲート

論理量子ビット

ホロノミー

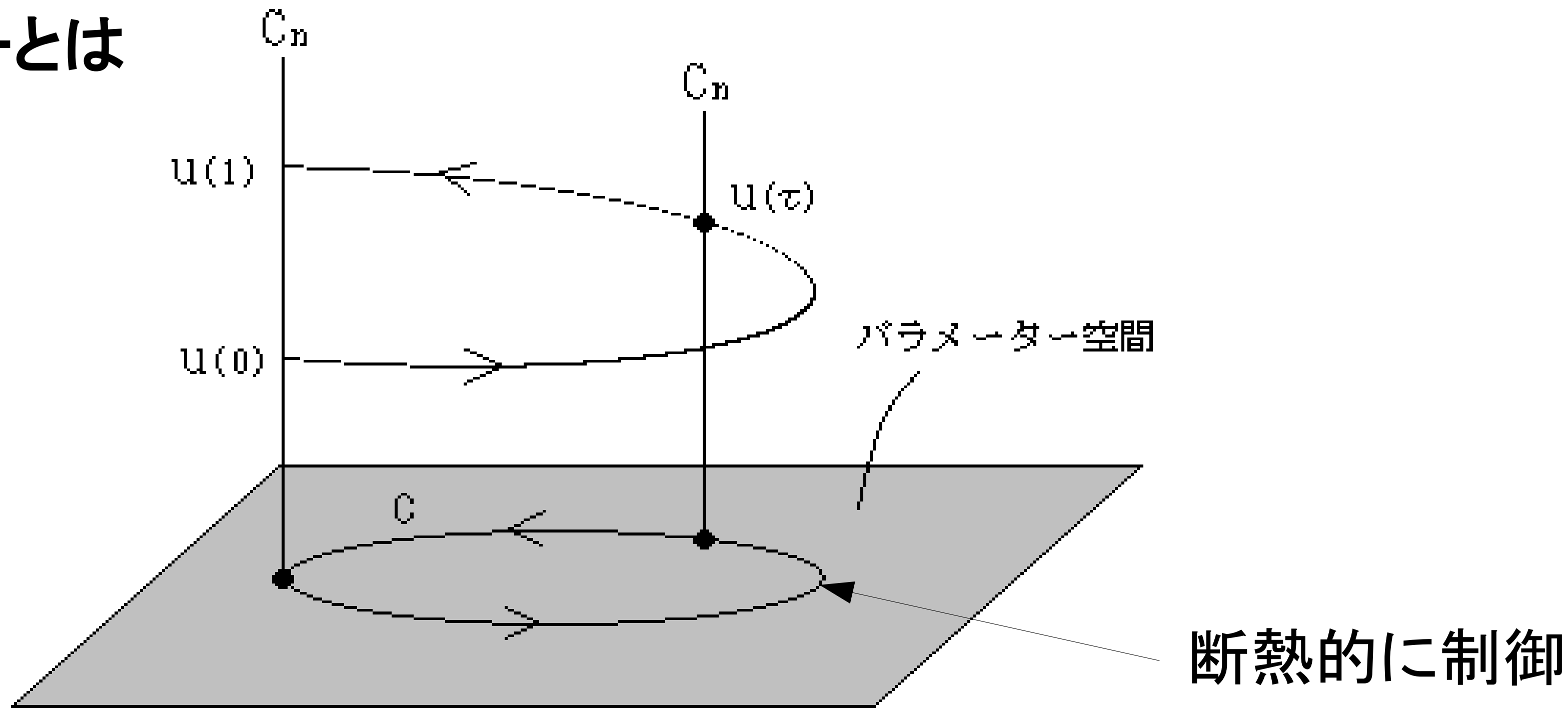
相互作用: Heisenberg 型 → 他のタイプでも実装可??

本研究: 液体状態 NMR を念頭にIsing 型を採用

26aRF-10

ホロノミック量子計算

- ホロノミーとは



$$u(1) = u(0) \cdot \Gamma[C]$$

Γ：反エルミート接続 A に伴うホロノミー

- ホロノミック量子計算とは

⇨ ホロノミーを使った量子計算

P. Zanardi and M. Rasetti, Phys. Lett. A **264**, 94 (1999).

ハミルトニアンの等スペクトル変形

ハミルトニアンを等スペクトル変形

⇩

時々刻々 ハミルトニアンを変化させる

$$H(t/T) = e^{Xt/T} H_0 e^{-Xt/T} \qquad (0 \leq t \leq T)$$

Xの選び方

- 反エルミート行列
- ハミルトニアンが終時刻で元に戻る

  ⇨ $e^X = \mathbb{1}$
- 非コード空間への遷移が無い(後述)

等スペクトル変形に伴うホロノミー

断熱近似

ホロノミー

$$\mathcal{T}\left[\exp(-i\int_0^T H(t/T)\,dt)\right] P_0 \approx e^{-i\int_0^T E_0(t/T)dt}\underline{\Gamma} P_0$$

$$P_0 = \sum_{i=1}^{g} |E_0,\, i\rangle\langle E_0,\, i|$$ ：基底固有空間への射影演算子

$$\boxed{H(t/T) = e^{Xt/T} H_0 e^{-Xt/T} \quad \text{等スペクトル変形}}$$

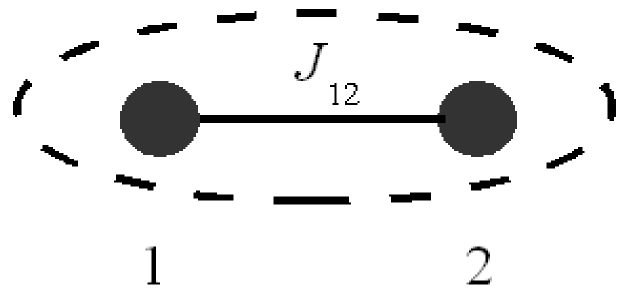
$$A_{ij}(\tau) = A_{ij} = \langle E_0,\, i|\, X\, |E_0,\, j\rangle$$ ：反エルミート接続(の成分)

$$\Longrightarrow \quad \Gamma = \mathcal{T}\left[\exp(-\int_0^1 A(\tau)d\tau)\right] = \underline{e^{-A}}$$

<u>A がわかれば，時間発展演算子が分かる</u>

ハミルトニアン

Ising 的な相互作用を行う２スピン系のハミルトニアン



- Hamiltonian

$$H_0 = -\omega\sigma_z \otimes I - \omega I \otimes \sigma_z + J\sigma_z \otimes \sigma_z$$

$$|T_+\rangle = |{+}{+}\rangle \ , \ |T_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|{+}{-}\rangle + |{-}{+}\rangle) \ , \ |T_-\rangle = |{-}{-}\rangle \ , \ |S_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|{+}{-}\rangle - |{-}{+}\rangle)$$

$$\begin{aligned} H_0 |T_+\rangle &= (-2\omega + J) |T_+\rangle \\ H_0 |T_0\rangle &= -J |T_0\rangle \\ H_0 |T_-\rangle &= (2\omega + J) |T_-\rangle \\ H_0 |S_0\rangle &= -J |S_0\rangle \end{aligned} \quad \xrightarrow{\omega = J}$$

3-fold degenerate

$|T_+\rangle \ , \ |T_0\rangle \ , \ |S_0\rangle$

基底状態

26aRF-10

結果1: 1量子ビットゲート

$$X = i\boldsymbol{n}\cdot(\Omega_1\boldsymbol{\sigma}_1 + \Omega_2\boldsymbol{\sigma}_2)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = \boldsymbol{\sigma}\otimes I\ ,\quad \boldsymbol{\sigma}_2 = I\otimes\boldsymbol{\sigma}$$
$$\mathbf{n} = (n_x\ ,\ n_y\ ,\ n_z)$$
$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x\ ,\ \sigma_y\ ,\ \sigma_z)\quad ,\quad |\mathbf{n}| = 1$$

$\Omega_1 = \Omega_2 = \nu$ と置く

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} |T_+\rangle & |T_0\rangle & |S_0\rangle \end{array} \\ A = & \begin{pmatrix} 2\,i\nu\,n_z & \sqrt{2}\,i\,\nu\,(n_x - in_y) & 0 \\ \sqrt{2}\,i\,\nu(n_x + in_y) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

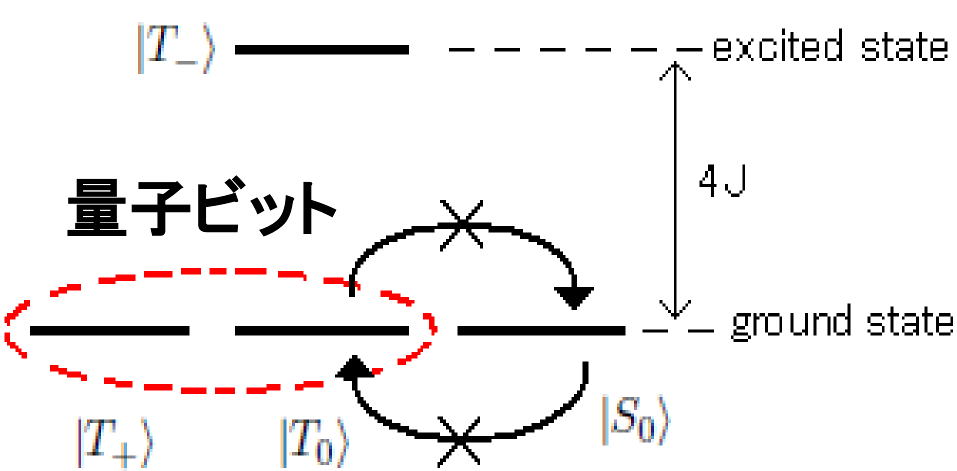
$|T_+\rangle$, $|T_0\rangle$ と $|S_0\rangle$ の間の遷移はない！

$\Downarrow$

$|T_+\rangle, |T_0\rangle \longrightarrow |0\rangle, |1\rangle$ ととる

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} |T_+\rangle & |T_0\rangle \end{array} \\ A\downarrow_{(T_+,T_0)} = i & \begin{pmatrix} 2\,\nu\,n_z & \sqrt{2}\,\nu\,(n_x - in_y) \\ \sqrt{2}\,\nu\,(n_x + in_y) & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

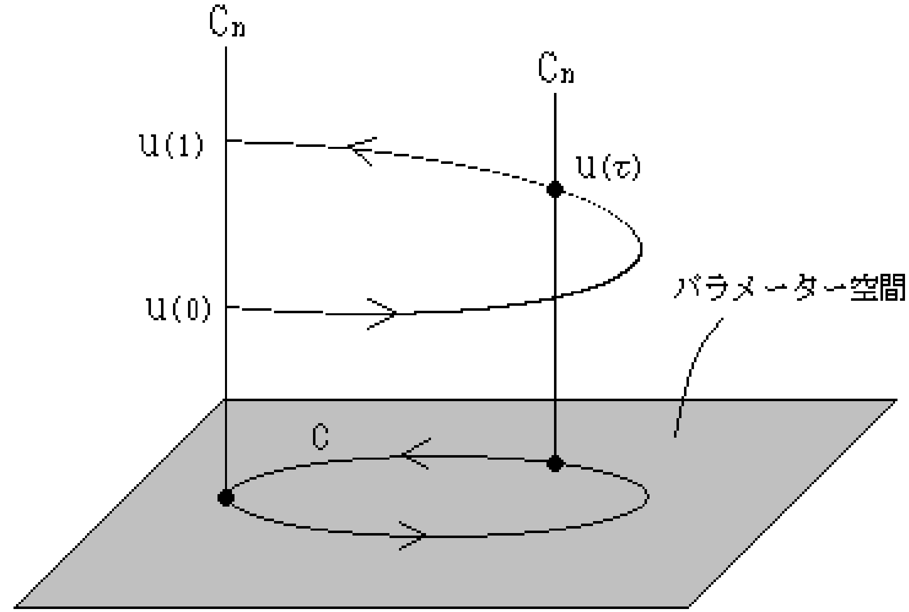
$$= \quad i[\nu\,n_z(I + \sigma_z) + \sqrt{2}\,\nu(n_x\,\sigma_x + n_y\,\sigma_y)]$$



$\nu = \kappa\pi \ (\kappa \in \mathbb{N})$ とする

パラメーターが閉曲線を描く

⇩



$$\Gamma = e^{-i\kappa\pi n_z} e^{-i\kappa\pi\sqrt{2-n_z^2}\,\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\sigma}}$$

$$= e^{-i\pi n_z}\begin{pmatrix} \cos\theta - im_z\sin\theta & -(im_x+m_y)\sin\theta \\ (-im_x+m_y)\sin\theta & \cos\theta - im_z\sin\theta \end{pmatrix}$$

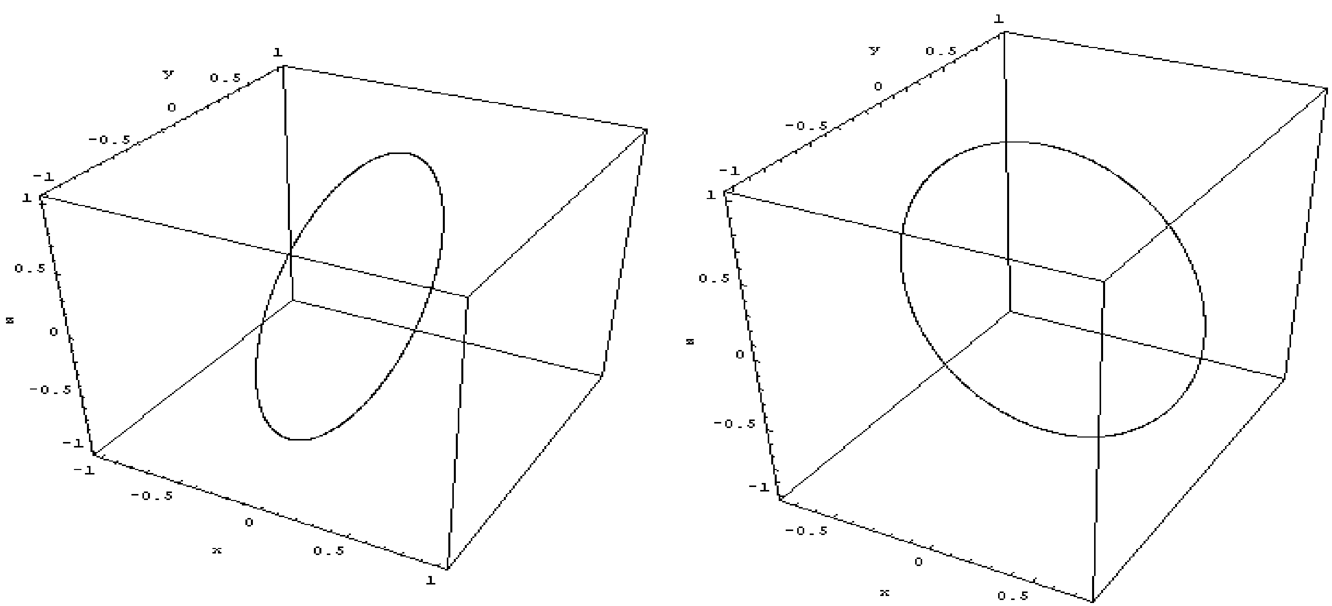
$$\boxed{\theta = \kappa\pi\sqrt{2-n_z^2} \ , \ \boldsymbol{m} = \left(\frac{\sqrt{2}n_x}{\sqrt{2-n_z^2}}, \frac{\sqrt{2}n_y}{\sqrt{2-n_z^2}}, \frac{n_z}{\sqrt{2-n_z^2}}\right) \ , \ |\boldsymbol{m}| = 1}$$

量子ゲート構成の具体例

例

$\boldsymbol{n}_1 = (1\,,\,0\,,\,0) \quad , \quad \boldsymbol{n}_2 = (0\,,\,1\,,\,0) \quad , \quad \kappa = 1$ と選べば,

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{2}\pi) & -i\sin(\sqrt{2}\pi) \\ -i\sin(\sqrt{2}\pi) & \cos(\sqrt{2}\pi) \end{pmatrix} \;,\; \Gamma_2 = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{2}\pi) & -\sin(\sqrt{2}\pi) \\ \sin(\sqrt{2}\pi) & \cos(\sqrt{2}\pi) \end{pmatrix} \;,\; [\Gamma_1\,,\,\Gamma_2] \neq 0$$



パラメータ空間

Hadamard gate

$$m = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)\ , \quad \frac{\theta_H}{\pi} = \frac{2}{\sqrt{3}}\kappa \quad , \ \sigma_H = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_{Lx} + \sigma_{Lz})$$

無理数

と置く。ここで、

$$\frac{\theta_H}{\pi} = \frac{1}{2} + 2n\pi$$

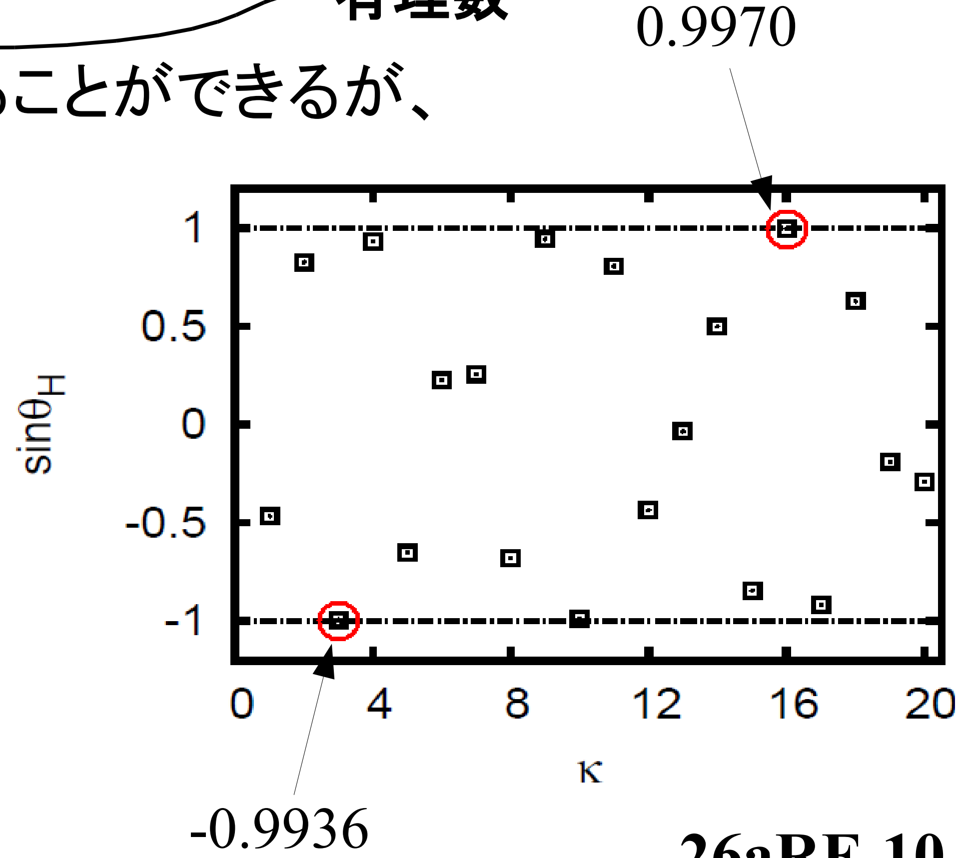
有理数

とすれば Hadamard gate を構成することができるが、

これを満たす κ は存在しない！

しかし

幾らでも近づけることはできる！



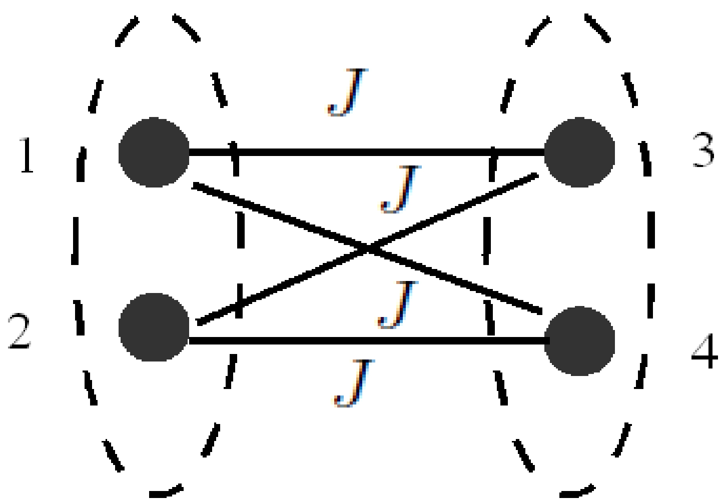
結果2: 制御演算

$$H_{2D} = H^{(12)} \otimes \mathbb{1}^{(34)} + \mathbb{1}^{(12)} \otimes H^{(34)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} H^{(12)} &= -J_{12}\,\sigma_{1z} - J_{12}\,\sigma_{2z} + J_{12}\,\sigma_{1z}\sigma_{2z} \\ H^{(34)} &= -J_{34}\,\sigma_{3z} - J_{34}\,\sigma_{4z} + J_{34}\,\sigma_{3z}\sigma_{4z} \end{aligned}}$$

$$X = X^{(12)} + X^{(34)} + X^{(12)-(34)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} X^{(12)} &= i\boldsymbol{n}_{(12)} \cdot (\Omega_{(12)}\boldsymbol{\sigma}_1 + \Omega_{(12)}\boldsymbol{\sigma}_2) \\ X^{(34)} &= i\boldsymbol{n}_{(34)} \cdot (\Omega_{(34)}\boldsymbol{\sigma}_3 + \Omega_{(34)}\boldsymbol{\sigma}_4) \\ X^{(12)-(34)} &= iJ(\sigma_{1z}\sigma_{3z} + \sigma_{1z}\sigma_{4z} + \sigma_{2z}\sigma_{3z} + \sigma_{2z}\sigma_{4z}) \end{aligned}}$$



ハミルトニアンが終時刻で元に戻る条件

$$\boxed{\begin{aligned} &\Omega_{(34)} = \kappa_1\pi \quad (\kappa_1 \in \mathbb{N}) \;,\quad \Omega_{(12)} = \kappa'\pi \quad (\kappa' \in \mathbb{N}) \\ &\sqrt{\Omega_{(34)}^2 + 8J^2} = \kappa_2\pi \quad (\kappa_2 \in \mathbb{N}) \end{aligned}}$$

$$\kappa_2 > \kappa_1 \;,\quad 3\kappa_1 > \kappa_2$$

$$\boldsymbol{\kappa} = (\kappa_1,\, \kappa_2) \;,\quad 2J = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\sqrt{\kappa_2^2 - \kappa_1^2}$$

構成できるゲートは

$$\Gamma^{(2)}(J,\,\kappa') = (-1)^{\kappa'}\,\Gamma^L(J,\,\kappa')\,\Gamma^C(J),$$

$$\Gamma^L(J,\,\kappa') = e^{-i(\kappa'\pi + J)\sigma_{Lz}} \otimes e^{-i\nu\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\sigma}_L} \;,\quad \Gamma^C(J) = \underline{|0\rangle_L\langle 0| \otimes I_L + |1\rangle_L\langle 1| \otimes e^{i2J\sigma_{Lz}}}$$

26aRF-10

まとめ

２スピン系
(Ising 的な相互作用)

⇓

論理量子ビットを構成

⇓ ← ホロノミーを解析的に計算

- 互いに非可換な２つの１量子ゲート
- 制御(Z)ゲート
- Hadamard gate (近似的)

を構成

26aRF-10

$$\boldsymbol{\kappa} = (\kappa_1, \kappa_2) \quad , \quad \nu = \sqrt{2\kappa_1^2\pi^2 - J^2} \quad , \quad \nu\boldsymbol{k} = (\sqrt{2\kappa_1^2\pi^2 - 2J^2}, 0, J)$$

先行研究における Hadamard gate

$$\Gamma = e^{AT} \Longrightarrow e^{A} \qquad (\text{T:total time} \Longrightarrow\ 1\ )$$

$$X = in\cdot(\omega_1\boldsymbol{\sigma}_1 + \omega_2\boldsymbol{\sigma}_2) \quad , \quad A = i\left(r_x\sigma_x + r_y\sigma_y + r_z\sigma_z + r_z I\right)$$

$$\text{gate} : u = \exp\left[i\left\{r_x\sigma_x + r_y\sigma_y + r_z\sigma_z + \left(r_z + 3J\left(1+\tau\right)\right)I\right\}\right] \qquad (\tau :\ \textit{pause time})$$

$$r_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega_1 - \omega_2)n_x \quad , \quad r_y = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\omega_1 - \omega_2)n_y \quad , \quad r_z = -\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)n_z$$

先行研究によれば，Hadamard gate を構成するための条件は

$$n = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\,,\,0\,,\,-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \quad , \quad \omega_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi \quad , \quad \omega_2 = 0 \quad , \quad r_x = r_z = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \quad , \quad r_y = 0$$

V.Karimipour and N.Majd, Phys. Rev. A **72**, 052305 (2005).

$$
e^X = \begin{pmatrix} \cos\theta - \sqrt{\frac{2}{3}}\, i\sin\theta & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} i\sin\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta - \sqrt{\frac{2}{3}}\, i\sin\theta & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} i\sin\theta \\ \frac{1}{\sqrt{3}} i\sin\theta & 0 & \cos\theta + \sqrt{\frac{2}{3}}\, i\sin\theta & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} i\sin\theta & 0 & \cos\theta + \sqrt{\frac{2}{3}}\, i\sin\theta \end{pmatrix} \underline{\neq I \otimes I}
$$

$$
\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi
$$

$$
\boxed{T = \frac{2}{\sqrt{3}} m \quad , \quad (m \in \mathbb{N}^+)}
$$

$$
e^{XT} = \pm I
$$

Hamiltonian のパラメータは終時刻で元に戻る.

$$
A' = \underline{iT}\left(r_x\sigma_x + r_y\sigma_y + r_z\sigma_z + r_z I\right) = i\left(r'_x\sigma_x + r'_y\sigma_y + r'_z\sigma_z + r'_z I\right) \quad , \quad r'_i = r_i T \qquad (i = x, y, z)
$$

構成されるゲート $\quad u' = \exp\left[i\left\{r'_x\sigma_x + r'_y\sigma_y + r'_z\sigma_z + \left(r'_z + 3J\left(T+\tau\right)\right) I\right\}\right]$

これが Hadamard gate になるには,

$$
r'_i = r_i \implies T = \frac{2}{\sqrt{3}} m = 1 \qquad (i = x, y, z \quad , \quad m \in \mathbb{N}^+)
$$

これを満たす m は存在しない.

万能量子ゲート

すべての量子回路を構成するために必要な量子ゲート (万能量子ゲート) の組は

- すべての 1 量子ビットゲート，すなわちユニタリー群 U(2) 全体と
- 任意の量子ビット間の CNOT ゲート

である [3]．本論文では 2 量子ゲートの作成は考察しないので，1 量子ビットゲートのみについて考える．

1 量子ビットの状態は半径 1 のブロッホ球上の点に対応させることができる．一方，非可換な 2 つの 1 量子ビットゲートは，異なった軸のある回転角 θ_1 , θ_2 の回転に対応する．θ_1 , θ_2 と π の比が有理数でないならば，原理的にこの回転を多数回行うことによってブロッホ球上の任意の点を，他の任意の点にいくらでも近づけることができる．

ホロノミー

Γ は次式のように定義されたものである.

$$\Gamma = \mathcal{T}\left[\exp(-\int_0^1 A(\tau)d\tau)\right] \tag{4.1}$$

また,

$$A(\tau) = \sum_{i,j} A_{ij}(\tau)\,|E_0,\,i(\tau)\rangle\,\langle E_0,\,j(\tau)| \tag{4.2}$$

$$A_{ij}(\tau) = \langle E_0,\,i(\tau)|\,\frac{d}{d\tau}\,|E_0,\,j(\tau)\rangle \tag{4.3}$$

を満たす. A は接続と呼ばれる. $|E_l,\,i(\tau)\rangle = e^{X\tau}\,|E_l,\,i\rangle$ であったことを思い出すと (4.3) は,

$$A_{ij}(\tau) = \langle E_0,\,i|\,e^{-X\tau}\frac{d}{d\tau}\,e^{X\tau}\,|E_0,\,j\rangle$$

$$= \langle E_0,\,i|\,X\,|E_0,\,j\rangle \equiv A_{ij} \tag{4.4}$$

となり, 接続 A は τ に依存しない. よって Γ は (4.1) より,

$$\Gamma = e^{-A} \tag{4.5}$$

となることが分かる.

Hamiltonian のパラメーター

$$H(\tau) = -J\boldsymbol{\alpha}(\tau)\cdot\boldsymbol{\sigma}\otimes I - JI\otimes\boldsymbol{\alpha}(\tau)\cdot\boldsymbol{\sigma} + J\sum_{a,b=x,y,z}\gamma_{ab}(\tau)\sigma_a\otimes\sigma_b$$

$$\boldsymbol{\alpha}(\tau) = \begin{pmatrix} -n_y\sin(2\nu\tau)+2\sin^2(\nu\tau)n_xn_z \\ n_x\sin(2\nu\tau)+2\sin^2(\nu\tau)n_yn_z \\ \cos(2\nu\tau)+2\sin^2(\nu\tau)n_z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_x(\tau) \\ \alpha_y(\tau) \\ \alpha_z(\tau) \end{pmatrix}$$

曲線 C は $H(1) = H(0)(= H_0)$ のとき閉曲線である.

$$\boldsymbol{\alpha}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

だから，$\nu = \pi$ とすれば閉曲線にすることができる.

theta の範囲

$$\theta = \pi\sqrt{2 - n_z^2}$$

$$\boldsymbol{m} = \left(\frac{\sqrt{2}n_x}{\sqrt{2-n_z^2}} \, , \, \frac{\sqrt{2}n_y}{\sqrt{2-n_z^2}} \, , \, \frac{n_z}{\sqrt{2-n_z^2}} \right) \; , \; |\boldsymbol{m}| = 1$$

とした．

n_z の取り得る値は $-1 \leq n_z \leq 1$ なので，θ の取り得る値は

$$\pi \leq \theta \leq \sqrt{2}\pi$$

となる．構成する 2 つの 1 論理量子ゲートを Γ_1，Γ_2 とする．交換関係

$$[\Gamma_1 \, , \, \Gamma_2] = -2ie^{-i\pi(n_{1z}+n_{2z})} \sin\theta_1 \sin\theta_2 (\boldsymbol{m}_1 \times \boldsymbol{m}_2) \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

において，$[\Gamma_1 \, , \, \Gamma_2] \neq 0$ となる為には

$$\sin\theta_1 \neq 0 \; , \quad \sin\theta_2 \neq 0 \; , \quad \boldsymbol{m}_1 \times \boldsymbol{m}_2 \neq 0$$

であればよいから結局 θ は

$$\pi < |\theta| \leq \sqrt{2}\pi$$

の範囲で選べばよいことがわかる．