安定な複合量子操作と幾何学的および動的位相

坂東将光、近藤康 [A]

近畿大学大学院総合理工学研究科、近畿大学理工学部 [A]

2010 年 9 月 23 日

日本物理学会 2010 年秋季大会@大阪府立大学

Introduction

幾何学的量子ゲート: **動的位相が** 0

幾何学的量子ゲートはエラーに対して堅牢である
と言われている。

Introduction

幾何学的量子ゲート: **動的位相が** 0

幾何学的量子ゲートはエラーに対して堅牢であると言われている。

Introduction

- 動的位相が 0 になる複合量子ゲートは、
  制御変数の強さの系統的なエラー に対して安定。
- これまで NMR で用いられてきた複合パルスの多くは、
  実は動的位相が 0 になるように構成されていた。
- NMR の複合パルスのアイデアを応用して、系統的なエラーに対して安定な複合量子ゲートを構成できる。

Introduction

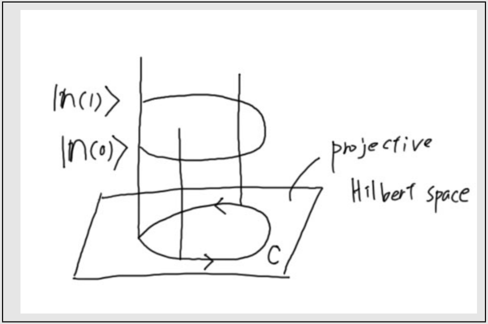
- 動的位相が 0 になる複合量子ゲートは、制御変数の強さの系統的なエラーに対して安定。
- これまで NMR で用いられてきた複合パルスの多くは、実は動的位相が 0 になるように構成されていた。
- NMR の複合パルスのアイデアを応用して、系統的なエラーに対して安定な複合量子ゲートを構成できる。

Introduction

- 動的位相が 0 になる複合量子ゲートは、制御変数の強さの系統的なエラー に対して安定。
- これまで NMR で用いられてきた複合パルスの多くは、実は動的位相が 0 になるように構成されていた。
- NMR の複合パルスのアイデアを応用して、系統的なエラーに対して安定な複合量子ゲートを構成できる。

動的位相と幾何学的位相

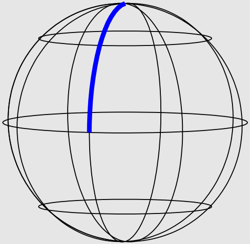
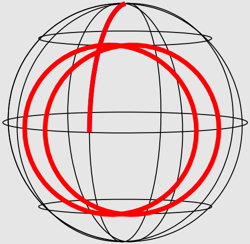
位相



$$|\boldsymbol{n}(1)\rangle = \underline{e^{i\gamma}}\,|\boldsymbol{n}(0)\rangle \quad , \quad \gamma = \gamma_{\mathrm{d}} + \gamma_{\mathrm{g}}$$

γ_{d}: **動的位相** , γ_{g}: **幾何学的位相**

複合量子ゲート

1 量子ビットゲート	複合量子ゲート
	

$$R(\boldsymbol{m},\theta) = \exp\left(-i\theta\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{2}\right)$$

θ: **制御変数の強さ** , m: **単位ベクトル** $(m \in \mathbb{R}^3)$
$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x,\ \sigma_y,\ \sigma_z)$

複合量子ゲート

1 量子ビットゲート

$$|\boldsymbol{n}_0\rangle \;\text{———}\; \boxed{R} \;\text{———}\; R\,|\boldsymbol{n}_0\rangle$$

$$R = R(\boldsymbol{m}, \theta) = \exp\left(-i\theta \frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{2}\right)$$

複合量子ゲート

$$|\boldsymbol{n}_0\rangle \;\text{———}\; \boxed{R_1} - \boxed{R_2} - \boxed{R_3} - \cdots - \boxed{R_N} \;\text{———}\; R_N \cdots R_2 R_1\,|\boldsymbol{n}_0\rangle$$

$$R_j = R(\boldsymbol{m}_j, \theta_j) = \exp\left(-i\theta_j \frac{\boldsymbol{m}_j\cdot\boldsymbol{\sigma}}{2}\right), \quad \prod_{j=1}^{N} R_j = R$$

θ: **制御変数の強さ** , $\boldsymbol{m}$: **単位ベクトル** $(\boldsymbol{m} \in \mathbb{R}^3)$

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x,\ \sigma_y,\ \sigma_z)$$

複合量子ゲート

1 量子ビットゲート

$$|\boldsymbol{n}_0\rangle \;—\; \boxed{R} \;—\; R\,|\boldsymbol{n}_0\rangle$$

$$R = R(\boldsymbol{m}, \theta) = \exp\left(-i\theta\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{2}\right)$$

複合量子ゲート

$$|\boldsymbol{n}_0\rangle \;—\; \boxed{R_1} — \boxed{R_2} — \boxed{R_3} — \cdots — \boxed{R_N} \;—\; R_N \cdots R_2 R_1\,|\boldsymbol{n}_0\rangle$$

$$R_j = R(\boldsymbol{m}_j, \theta_j) = \exp\left(-i\theta_j\frac{\boldsymbol{m}_j\cdot\boldsymbol{\sigma}}{2}\right) \;, \quad \prod_{j=1}^{N} R_j = R$$

θ: **制御変数の強さ** , $\boldsymbol{m}$: **単位ベクトル** $(\boldsymbol{m} \in \mathbb{R}^3)$

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x,\ \sigma_y,\ \sigma_z)$$

複合量子ゲート

1 量子ビットゲート ⟺ **ハミルトニアン**

$$R(\boldsymbol{m},\theta) = \exp\left(-i\theta\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{2}\right) \iff H(\boldsymbol{m},\theta) = \theta\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{2}\frac{1}{T}$$

動的位相

$$\gamma_{\mathrm{d}} = -\int_0^T \langle\boldsymbol{n}|\, H(\boldsymbol{m},\theta)\, |\boldsymbol{n}\rangle\, dt = -\frac{\theta}{2}\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}$$

$\boldsymbol{n}$: Bloch **ベクトル** , $|\boldsymbol{n}\rangle$: **状態ベクトル**

$$\boldsymbol{n} = \langle\boldsymbol{n}|\,\boldsymbol{\sigma}\,|\boldsymbol{n}\rangle$$

複合量子ゲート

1 量子ビットゲート ハミルトニアン

$$R(\boldsymbol{m},\theta) = \exp\left(-i\theta\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{2}\right) \iff H(\boldsymbol{m},\theta) = \theta\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{2}\frac{1}{T}$$

動的位相

$$\underline{\gamma_{\mathrm{d}} = -\int_0^T \langle \boldsymbol{n}|\, H(\boldsymbol{m},\theta)\, |\boldsymbol{n}\rangle\, dt = -\frac{\theta}{2}\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}$$

$\boldsymbol{n}$: Bloch **ベクトル** , $|\boldsymbol{n}\rangle$: **状態ベクトル**

$$\boldsymbol{n} = \langle \boldsymbol{n}|\, \boldsymbol{\sigma}\, |\boldsymbol{n}\rangle$$

Cyclic States

suppose

$$|\boldsymbol{n}_+(0)\rangle\,, \quad |\boldsymbol{n}_-(0)\rangle\,, \quad \langle \boldsymbol{n}_+(0)|\,\boldsymbol{n}_-(0)\rangle = 0$$

$$|\boldsymbol{n}_\pm(1)\rangle = e^{i\gamma_\pm}\,|\boldsymbol{n}_\pm(0)\rangle$$

$\boldsymbol{n}_\pm(0)$: **基本** Bloch **ベクトル**

$$|\boldsymbol{n}(0)\rangle = a_+\,|\boldsymbol{n}_+(0)\rangle + a_-\,|\boldsymbol{n}_-(0)\rangle$$

$$|\boldsymbol{n}(1)\rangle = a_+e^{i\gamma_+}\,|\boldsymbol{n}_+(0)\rangle + a_-e^{i\gamma_-}\,|\boldsymbol{n}_-(0)\rangle$$

時間発展演算子

$$U = e^{i\gamma_+}\,|\boldsymbol{n}_+(0)\rangle\,\langle \boldsymbol{n}_+(0)| + a_-e^{i\gamma_-}\,|\boldsymbol{n}_-(0)\rangle\,\langle \boldsymbol{n}_-(0)|$$

動的位相とゲートの安定性

θ の系統的なエラー

error in θ $\quad (\varepsilon \ll 1)$

1 量子ビットゲート

$$R(\boldsymbol{m}, \theta(1+\varepsilon)) = R(\boldsymbol{m}, \theta) + O(\varepsilon)$$

複合量子ゲート

$$\prod_{j=1}^{N} R(\boldsymbol{m}_j, \theta_j(1+\varepsilon)) = R(\boldsymbol{m}, \theta) + \underline{O(\varepsilon)}$$

系統的なエラーに対して安定な 複合量子ゲート

$$\prod_{j=1}^{N} R(\boldsymbol{m}_j, \theta_j(1+\varepsilon)) = R(\boldsymbol{m}, \theta) + \underline{O(\varepsilon^2)}$$

θ の系統的なエラー

error in θ $\quad(\varepsilon \ll 1)$

1 量子ビットゲート

$$R(\boldsymbol{m}, \theta(1+\varepsilon)) = R(\boldsymbol{m}, \theta) + O(\varepsilon)$$

複合量子ゲート

$$\prod_{j=1}^{N} R(\boldsymbol{m}_j, \theta_j(1+\varepsilon)) = R(\boldsymbol{m}, \theta) + \underline{O(\varepsilon)}$$

系統的なエラーに対して安定な 複合量子ゲート

$$\prod_{j=1}^{N} R(\boldsymbol{m}_j, \theta_j(1+\varepsilon)) = R(\boldsymbol{m}, \theta) + \underline{O(\varepsilon^2)}$$

θ の系統的なエラー

error in θ $\quad (\varepsilon \ll 1)$

1 量子ビットゲート

$$R(\boldsymbol{m}, \theta(1+\varepsilon)) = R(\boldsymbol{m}, \theta) + O(\varepsilon)$$

複合量子ゲート

$$\prod_{j=1}^{N} R(\boldsymbol{m}_j, \theta_j(1+\varepsilon)) = R(\boldsymbol{m}, \theta) + \underline{O(\varepsilon)}$$

系統的なエラーに対して安定な 複合量子ゲート

$$\prod_{j=1}^{N} R(\boldsymbol{m}_j, \theta_j(1+\varepsilon)) = R(\boldsymbol{m}, \theta) + \underline{O(\varepsilon^2)}$$

複合量子ゲートと動的位相

系統的なエラーのある複合量子ゲート

$$\prod_{j=1}^{N} R(\boldsymbol{m}_j, \theta_j(1+\varepsilon)) = R(\boldsymbol{m}, \theta) + \sum_{j=1}^{N} R_N \dots R_j \left(-i\varepsilon\theta_j \frac{\boldsymbol{m}_j \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2}\right) \dots R_1 + O(\varepsilon^2)$$

$$= R(\boldsymbol{m}, \theta) - \underline{i\varepsilon \sum_{j=1}^{N} R_N \dots (R_j H_j T_j) \dots R_1} + O(\varepsilon^2)$$

$$R_j = R(\boldsymbol{m}_j, \theta_j) = \exp\left(-i\theta_j \frac{\boldsymbol{m}_j \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2}\right)$$

$$H_j = H(\boldsymbol{m}_j, \theta_j) = \theta_j \frac{\boldsymbol{m}_j \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2} \frac{1}{T_j}$$

複合量子ゲートと動的位相

期待値

$$-\langle \boldsymbol{n}_0 | \sum_{j=1}^{N} R_N \dots R_j H_j T_j R_{j-1} \dots R_1 | \boldsymbol{n}_0 \rangle = -e^{-i\theta/2} \sum_{j=1}^{N} \langle \boldsymbol{n}_{j-1} | H_j T_j | \boldsymbol{n}_{j-1} \rangle$$

$$= -e^{-i\theta/2} \sum_{j=1}^{N} \gamma_{\mathrm{d},j}$$

$$\sum_{j=1}^{N} \gamma_{\mathrm{d},j} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \prod_{j=1}^{N} R(\boldsymbol{m}_j, \theta_j(1+\varepsilon)) = \underline{R(\boldsymbol{m}, \theta) + O(\varepsilon^2)}$$

$\boxed{\text{動的位相が 0}} \iff \boxed{\text{"制御変数の強さの系統的なエラー" に対して安定}}$

複合量子ゲートと動的位相

期待値

$$-\langle \boldsymbol{n}_0 | \sum_{j=1}^{N} R_N \ldots R_j H_j T_j R_{j-1} \ldots R_1 | \boldsymbol{n}_0 \rangle = -e^{-i\theta/2} \sum_{j=1}^{N} \langle \boldsymbol{n}_{j-1} | H_j T_j | \boldsymbol{n}_{j-1} \rangle$$

$$= -e^{-i\theta/2} \sum_{j=1}^{N} \gamma_{\mathrm{d},j}$$

$$\sum_{j=1}^{N} \gamma_{\mathrm{d},j} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \prod_{j=1}^{N} R(\boldsymbol{m}_j, \theta_j(1+\varepsilon)) = \underline{R(\boldsymbol{m}, \theta) + O(\varepsilon^2)}$$

動的位相が 0 $\Longleftrightarrow$ "制御変数の強さの系統的なエラー" に対して安定

複合量子ゲートと動的位相

期待値

$$-\langle \boldsymbol{n}_0| \sum_{j=1}^{N} R_N \dots R_j H_j T_j R_{j-1} \dots R_1 |\boldsymbol{n}_0\rangle = -e^{-i\theta/2} \sum_{j=1}^{N} \langle \boldsymbol{n}_{j-1}| H_j T_j |\boldsymbol{n}_{j-1}\rangle$$

$$= -e^{-i\theta/2} \sum_{j=1}^{N} \gamma_{\mathrm{d},j}$$

$$\sum_{j=1}^{N} \gamma_{\mathrm{d},j} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \prod_{j=1}^{N} R(\boldsymbol{m}_j, \theta_j(1+\varepsilon)) = \underline{R(\boldsymbol{m}, \theta) + O(\varepsilon^2)}$$

動的位相が 0 $\Longleftrightarrow$ **"制御変数の強さの系統的なエラー" に対して安定**

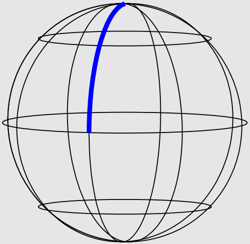
例

W1 sequence

W1 sequence

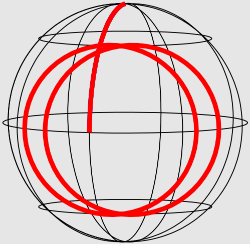
$$U_{\mathrm{W1}} = R(\boldsymbol{m}_1, \pi) R(\boldsymbol{m}_2, 2\pi) R(\boldsymbol{m}_1, \pi) = I$$

Single



$R(\boldsymbol{x}, \pi/2)$

Composite



$R(\boldsymbol{x}, \pi/4)\, U_{\mathrm{W1}}\, R(\boldsymbol{x}, \pi/4)$

$$\phi_1 = \pm \arccos\left(-\theta/(4\pi)\right), \qquad \phi_2 = 3\phi_1$$

$$\boldsymbol{m}_i = (\cos\phi_i,\ \sin\phi_i,\ 0)$$

W1 sequence

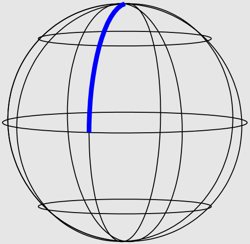
$$U_{\mathrm{W1}} = e^{i\gamma_{\mathrm{W1}}} |\boldsymbol{x}\rangle\langle\boldsymbol{x}| + e^{-i\gamma_{\mathrm{W1}}} |-\boldsymbol{x}\rangle\langle-\boldsymbol{x}|$$

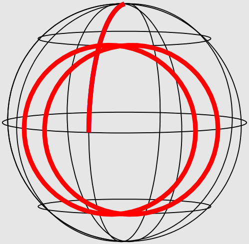
$$\gamma_{\mathrm{W1}} = \gamma_{\mathrm{g,W1}} + \gamma_{\mathrm{d,W1}} = 0 \ , \quad \underline{\gamma_{\mathrm{d,W1}}} = -\gamma_{\mathrm{g,W1}} = \underline{\theta/2}$$

Dynamic Phase Gate

Geometric Phase Gate

$$R(\boldsymbol{x}, \theta) \quad \Longrightarrow \quad R(\boldsymbol{x}, \theta/2) U_{\mathrm{W1}} R(\boldsymbol{x}, \theta/2)$$

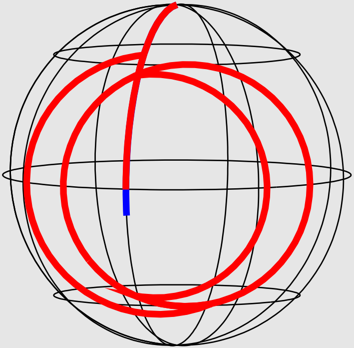




$$\gamma_{\mathrm{d}} = -\theta/2$$

$$\gamma_{\mathrm{d}} = -\theta/2 + \underline{\theta/2} = 0$$

W1 sequence



θ に 10%のエラーがあるときの、
90x ゲート及び W1 sequence による複合 90x ゲート。

Summary

- 動的位相が 0 になる複合量子ゲートは、制御変数の強さの系統的なエラーに対して安定である。
- 例として、W1 sequence を用いた安定な複合量子ゲートが構成できることを示した。

arXiv:1005.3917