

二種類の系統的なエラーに耐性のある量子ゲート

坂東将光[†]

市川翼[†], 近藤康^{†‡}, 中原幹夫^{†‡}

[†] 近畿大学大学院総合理工学研究科 量子コンピュータ研究センター

[‡] 近畿大学理工学部

2011 年 9 月 21 日

Introduction

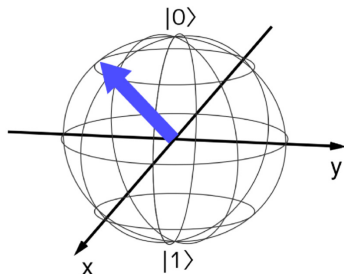
■ 古典コンピュータ

状態: 0, 1 (離散的)

■ 量子コンピュータ

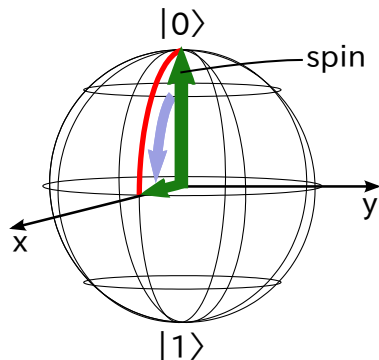
状態: $|0\rangle, |1\rangle, \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ (連続的)
($|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$)

⇒ エラーの影響を受けやすい



Quantum gate

NMR 量子コンピュータにおける 1 量子ビットゲート



$$|n_0\rangle \longrightarrow \boxed{U} \longrightarrow U |n_0\rangle$$

$$|n_0\rangle \longrightarrow U(\theta, \phi) |n_0\rangle$$

$U(\theta, \phi)$: 量子ゲート

$$|n_0\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$$

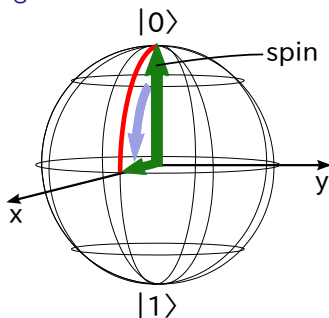
$$\alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, \quad |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quantum gate

$$U(\theta, \phi) = \exp\left(-i\theta \frac{\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2}\right)$$

θ : 回転角 (制御場の強さ \times 時間)
 $\mathbf{m} = (\cos \phi, \sin \phi, 0)$: 回転軸, $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$

e.g.



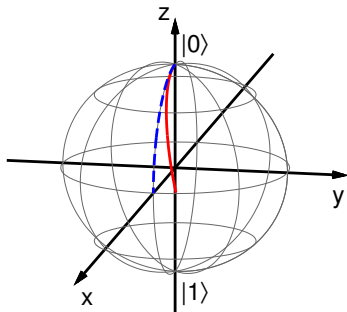
$$\theta = \phi = \pi/2$$

y 軸周りの $\pi/2$ 回転

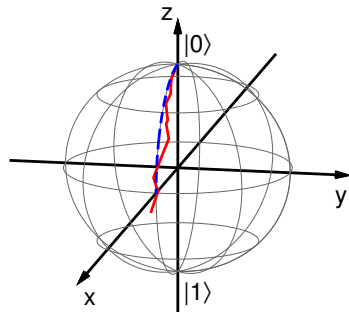
$$U(\pi/2, \pi/2) |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)$$

Error

■ 系統的なエラー



■ ランダムなエラー



Error

理想的な 1 量子ビットゲート

$$\exp\left(-i\theta\frac{\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{2}\right)$$

pulse strength error がある場合

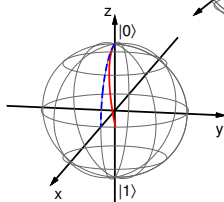
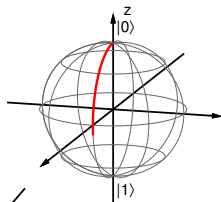
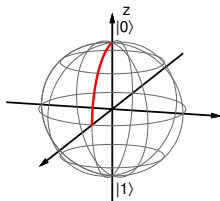
$$\exp\left(-i\theta(1+\varepsilon)\frac{\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{2}\right)$$

off-resonance error がある場合

$$\exp\left(-i\theta\frac{(\mathbf{m}+f\hat{z})\cdot\boldsymbol{\sigma}}{2}\right)$$

両方のエラーがある場合

$$\exp\left(-i\theta(1+\varepsilon)\frac{(\mathbf{m}+f\hat{z})\cdot\boldsymbol{\sigma}}{2}\right)$$



ロバストな量子ゲート

理想的な量子ゲート

$$U(\theta, \phi)$$

エラーがある量子ゲート

$$V(\theta, \phi) = U(\theta, \phi) \left(1 + \mathcal{O}(\varepsilon) \right)$$

ロバストな量子ゲート

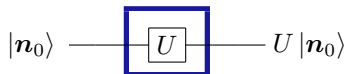
$$V(\theta, \phi) = U(\theta, \phi) \left(1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right)$$

複合量子ゲート

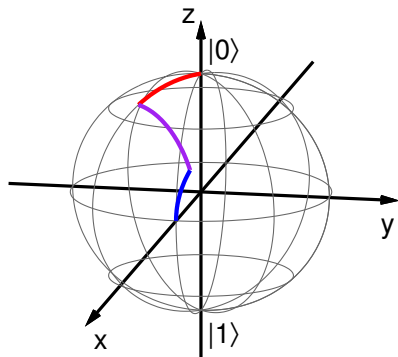
複合量子ゲート



単純量子ゲート



$$\mathcal{T} \prod_{j=1}^N U_j = U$$



これまでの複合量子ゲート

■ 90-180-90 ゲート

M. H. Levitt & R. Freeman, J. Magn. Reson. **33**, 473-476 (1979).

- 特定の初期状態 ($|0\rangle, |1\rangle$) に対してのみロバスト

これまでの複合量子ゲート

■ 90-180-90 ゲート

M. H. Levitt & R. Freeman, *J. Magn. Reson.* **33**, 473-476 (1979).

- 特定の初期状態 ($|0\rangle, |1\rangle$) に対してのみロバスト

■ BB1, SCROFULOUS, etc.

S. Wimperis, *J. Magn. Reson. A* **109** 221-231 (1994),
H. K. Cummins, *et. al*, *Phys. Rev. A* **67**, 042308 (2003).

- pulse strength error に対してのみロバスト

これまでの複合量子ゲート

■ 90-180-90 ゲート

M. H. Levitt & R. Freeman, *J. Magn. Reson.* **33**, 473-476 (1979).

- 特定の初期状態 ($|0\rangle, |1\rangle$) に対してのみロバスト

■ BB1, SCROFULOUS, etc.

S. Wimperis, *J. Magn. Reson. A* **109** 221-231 (1994),

H. K. Cummins, *et. al*, *Phys. Rev. A* **67**, 042308 (2003).

- pulse strength error に対してのみロバスト

■ CORPSE, etc.

H. K. Cummins, *et. al*, *Phys. Rev. A* **67**, 042308 (2003).

- off-resonance error に対してのみロバスト

これまでの複合量子ゲート

■ 90-180-90 ゲート

M. H. Levitt & R. Freeman, *J. Magn. Reson.* **33**, 473-476 (1979).

- 特定の初期状態 ($|0\rangle, |1\rangle$) に対してのみロバスト

■ BB1, SCROFULOUS, etc.

S. Wimperis, *J. Magn. Reson. A* **109** 221-231 (1994),
H. K. Cummins, *et. al*, *Phys. Rev. A* **67**, 042308 (2003).

- pulse strength error に対してのみロバスト

■ CORPSE, etc.

H. K. Cummins, *et. al*, *Phys. Rev. A* **67**, 042308 (2003).

- off-resonance error に対してのみロバスト

■ 両方のエラーに対してロバストな複合量子ゲート

W. G. Alway, J. A. Jones, *J. Magn. Reson.* **189** 114 (2007).

- 回転角が π のみ

- 両方のエラーに対してロバストな複合量子ゲート
 - 回転角が π のみ

回転角 π の量子ゲートをいくら組み合わせても、
任意の 1 量子ビットゲートを作ることはできない。

$$\prod_{j=1}^N U(\pi, \phi_j) = \begin{cases} U(\pi, \phi) & N = 2n + 1 \quad (n \in \mathbb{N}) \\ \exp\left(-i\theta \frac{\sigma_z}{2}\right) & N = 2n \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

- 両方のエラーに対してロバストな複合量子ゲート
 - 回転角が π のみ

回転角 π の量子ゲートをいくら組み合わせても、
任意の 1 量子ビットゲートを作ることはできない。

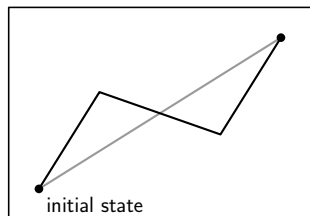
$$\prod_{j=1}^N U(\pi, \phi_j) = \begin{cases} U(\pi, \phi) & N = 2n + 1 \quad (n \in \mathbb{N}) \\ \exp\left(-i\theta \frac{\sigma_z}{2}\right) & N = 2n \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

そこで本研究では…



- 両方のエラーに対してロバストな新しい複合量子ゲート
 - + 任意の回転角
 - + 任意の 1 量子ビットゲートを実現できる

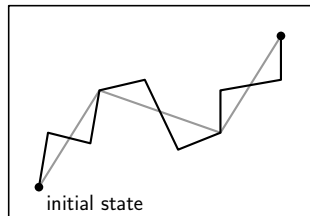
Concatenation



U
naive



$U_3U_2U_1$
1 種類のエラー
に対してロバスト



$U_3U_2U_1$
1 種類のエラー
に対してロバスト



$U_{3,3}U_{3,2}\cdots U_{1,2}U_{1,1}$
2 種類のエラー
に対してロバスト

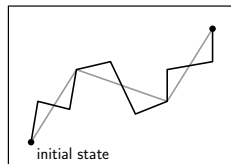
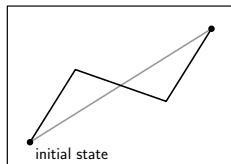
Concatenation

CORPSE $U(\theta_1, \underline{\phi})U(\theta_2, \underline{\phi + \pi})U(\theta_1 + 2\pi, \underline{\phi}) = U(\theta, \underline{\phi})$

$$\theta_1 = \frac{\theta}{2} - k, \quad \theta_2 = 2\pi - 2k, \quad k = \arcsin\left(\frac{1}{2} \sin \frac{\theta}{2}\right)$$

pulse strength error(ε) と off-resonance error(f) 両方がある場合の CORPSE

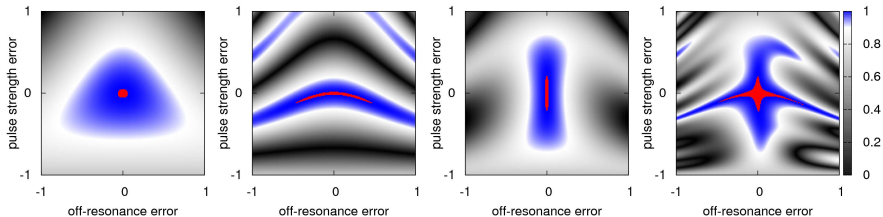
$$V(\theta_1, \phi)V(\theta_2, \phi + \pi)V(\theta_1 + 2\pi, \phi) = U(\theta(1 + \varepsilon), \phi)\left(1 + \mathcal{O}(f^2)\right)$$



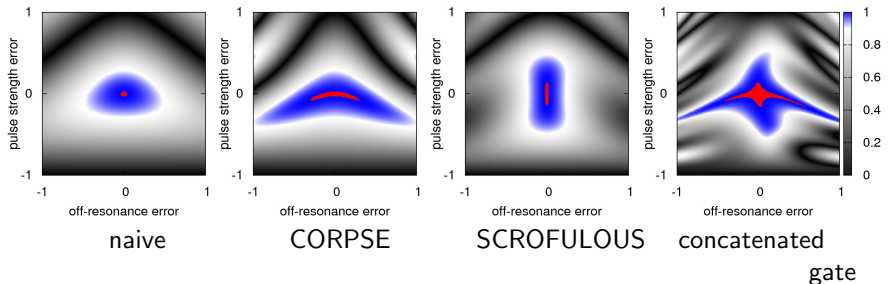
Fidelity

$$\text{fidelity: } F = \frac{1}{2} |\text{tr}(U^\dagger V)|$$

$$\theta = \pi/2$$



$$\theta = \pi$$



Summary

- 既存の複合量子ゲートを組み合わせて、2種類の系統的なエラーに耐性のある量子ゲートを設計した。
- 任意の1量子ビットゲートを実現可能である。
- 複合量子ゲートは、エラーの形が変わらないように組み合わせる必要がある。

References

- M. H. Levitt & R. Freeman, *J. Magn. Reson.* **33**, 473-476 (1979).
- H. K. Cummins, *et. al*, *Phys. Rev. A* **67**, 042308 (2003).
- W. G. Alway, J. A. Jones, *J. Magn. Reson.* **189**, 114 (2007).
- T. Ichikawa, M. Bando, Y. Kondo and M. Nakahara (in preparation).