

複合量子操作と動的位相

坂東将光[†]、近藤康^{†‡}

[†] 近畿大学量子コンピューターセンター、[‡] 近畿大学理工学部

2010年11月16日

第23回量子情報技術研究会 (QIT23) @東京大学

Introduction

複合パルス

- NMR でよく使われている
- 複数のパルス (ゲート) で構成
- エラーに対して安定

幾何学的位相ゲート

- 幾何学的位相のみで構成
- エラーに対して安定
と言われていている

key point

動的位相

Introduction

複合パルス

- NMR でよく使われている
- 複数のパルス (ゲート) で構成
- エラーに対して安定

幾何学的位相ゲート

- 幾何学的位相のみで構成
- エラーに対して安定
とされている

key point

動的位相

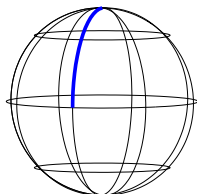
Today's talk

- 動的位相のない量子ゲート はある種のエラーに対して安定
 - 幾何学的位相ゲートは 動的位相のない量子ゲート
- 動的位相が 0 になるように複合量子ゲートを構成

複合量子ゲート

単純量子ゲート

$$|n_0\rangle \longrightarrow \boxed{R} \longrightarrow R|n_0\rangle$$



エラーに対して安定 (robust) な量子ゲートを構成したい

⇓ NMR では…

複合量子ゲート

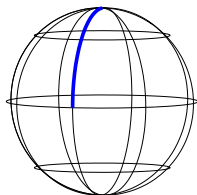
$$|n_0\rangle \longrightarrow \boxed{R_1} \longrightarrow \boxed{R_2} \longrightarrow \boxed{R_3} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \boxed{R_N} \longrightarrow R_N \cdots R_2 R_1 |n_0\rangle$$

$$\mathcal{T} \prod_{j=1}^N R_j = R$$

複合量子ゲート

単純量子ゲート

$$|n_0\rangle \longrightarrow \boxed{R} \longrightarrow R|n_0\rangle$$



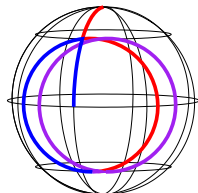
エラーに対して安定 (robust) な量子ゲートを構成したい

⇓ NMR では…

複合量子ゲート

$$|n_0\rangle \longrightarrow \boxed{R_1} \longrightarrow \boxed{R_2} \longrightarrow \boxed{R_3} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \boxed{R_N} \longrightarrow R_N \cdots R_2 R_1 |n_0\rangle$$

$$\mathcal{T} \prod_{j=1}^N R_j = R$$



複合量子ゲート

単純量子ゲート

$$|n_0\rangle \longrightarrow \boxed{R} \longrightarrow R|n_0\rangle \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

$$R = R(\mathbf{m}, \theta) = \exp\left(-i\theta \frac{\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2}\right), \quad |n_0\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

複合量子ゲート

$$|n_0\rangle \longrightarrow \boxed{R_1} \longrightarrow \boxed{R_2} \longrightarrow \boxed{R_3} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \boxed{R_N} \longrightarrow R_N \cdots R_2 R_1 |n_0\rangle$$

$$R_j = R(\mathbf{m}_j, \theta_j) = \exp\left(-i\theta_j \frac{\mathbf{m}_j \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2}\right),$$

$$\prod_{j=1}^N R_j = R$$

θ : 制御変数の強さ × 時間 , \mathbf{m} : 単位ベクトル ($\mathbf{m} \in \mathbb{R}^3$)
 $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$

複合量子ゲート

単純量子ゲート

$$|n_0\rangle \text{ ——— } \boxed{R} \text{ ——— } R|n_0\rangle \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

$$R = R(\mathbf{m}, \theta) = \exp\left(-i\theta \frac{\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2}\right), \quad |n_0\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

複合量子ゲート

$$|n_0\rangle \text{ ——— } \boxed{R_1} \text{ — } \boxed{R_2} \text{ — } \boxed{R_3} \text{ — } \cdots \text{ — } \boxed{R_N} \text{ ——— } R_N \cdots R_2 R_1 |n_0\rangle$$

$$R_j = R(\mathbf{m}_j, \theta_j) = \exp\left(-i\theta_j \frac{\mathbf{m}_j \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2}\right),$$

$$\prod_{j=1}^N R_j = R$$

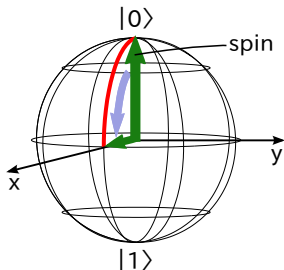
θ : 制御変数の強さ × 時間 , \mathbf{m} : 単位ベクトル ($\mathbf{m} \in \mathbb{R}^3$)
 $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$

単純量子ゲート

$$R(\mathbf{m}, \theta) = \exp\left(-i\theta \frac{\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2}\right) = \exp(-iHT)$$

θ : 制御変数の強さ \times 時間 , \mathbf{m} : 単位ベクトル ($\mathbf{m} \in \mathbb{R}^3$)
 $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$

例えば...



$$\theta = \pi/2, \mathbf{m} = (0, 1, 0)$$

y 軸周りに $\pi/2$ の回転

$$R|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

単純量子ゲートと pulse strength error

Hamiltonian

$$H = \theta \frac{\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2} \frac{1}{T}$$

$$H \implies (1 + \varepsilon)H$$

Gate

$$R = \exp(-iHT)$$

$$R(\mathbf{m}, \theta) \implies \tilde{R}(\mathbf{m}, \theta) = R(\mathbf{m}, \underline{\theta(1 + \varepsilon)})$$

単純量子ゲートと pulse strength error

Hamiltonian

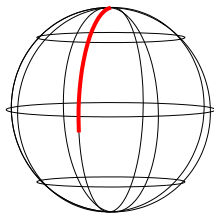
$$H = \theta \frac{\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2} \frac{1}{T}$$

$$H \implies (1 + \varepsilon)H$$

Gate

$$R = \exp(-iHT)$$

$$R(\mathbf{m}, \theta) \implies \tilde{R}(\mathbf{m}, \theta) = R(\mathbf{m}, \theta(1 + \varepsilon))$$



回転角 θ に系統的なエラーがある

複合量子ゲートと pulse strength error

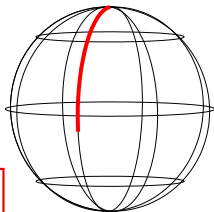
$$\tilde{R}(\mathbf{n}_0, \theta) = \prod_{j=1}^N R(\mathbf{m}_j, \theta_j(1+\varepsilon))$$

エラーが無いときは…

$$R(\mathbf{n}_0, \theta) = \prod_{j=1}^N R(\mathbf{m}_j, \theta_j)$$

pulse strength error

$$R(\mathbf{m}_j, \theta_j(1+\varepsilon)) = \exp\left(-i\theta_j(1+\varepsilon)\frac{\mathbf{m}_j \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2}\right)$$



回転角 θ に系統的なエラーがある

複合量子ゲートと pulse strength error

単純量子ゲート

$$R(\mathbf{m}_j, \theta_j(1+\varepsilon)) = R(\mathbf{m}_j, \theta_j) \left(1 + \mathcal{O}(\varepsilon)\right)$$

単純量子ゲートの組み合わせ

$$\prod_{j=1}^N R(\mathbf{m}_j, \theta_j(1+\varepsilon)) = \left(\prod_{j=1}^N R(\mathbf{m}_j, \theta_j) \right) \left(1 + \underline{\mathcal{O}(\varepsilon)}\right)$$

pulse strength error に対して安定な 複合量子ゲート

$$\tilde{R}(\mathbf{n}_0, \theta) = \prod_{j=1}^N R(\mathbf{m}_j, \theta_j(1+\varepsilon)) = R(\mathbf{n}_0, \theta) \left(1 + \underline{\mathcal{O}(\varepsilon^2)}\right)$$

安定な複合量子ゲートの条件

$$\prod_{j=1}^N \tilde{R}_j = R(\mathbf{n}_0, \theta) - i\varepsilon \sum_{j=1}^N R_N \dots (H_j T_j R_j) \dots R_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

θ の系統的なエラーに対して安定な条件

$$\sum_{j=1}^N R_N \dots (H_j T_j R_j) \dots R_1 = 0$$

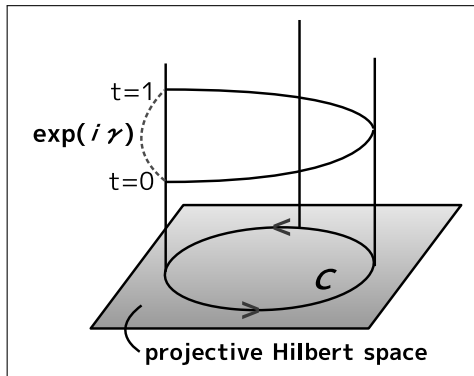
R_j : j 番目の単純量子ゲート

\tilde{R}_j : j 番目のエラーのある単純量子ゲート

$$H_j = \frac{\theta_j}{2} \mathbf{m}_j \cdot \boldsymbol{\sigma} \frac{1}{T_j}, \quad (T_j = t_j - t_{j-1})$$

動的位相、幾何学的位相

Aharonov-Anandan phase



$$|\mathbf{n}(1)\rangle = \exp(i\gamma) |\mathbf{n}(0)\rangle$$

$$\gamma = \gamma_d + \gamma_g$$

$$\text{動的位相: } \gamma_d = - \int_0^T \langle \mathbf{n}(t) | H | \mathbf{n}(t) \rangle dt$$

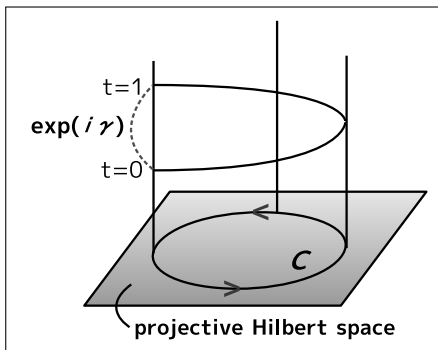
$$\text{幾何学的位相: } \gamma_g = \gamma - \gamma_d \quad (H : \text{ハミルトニアン})$$

Cyclic States

$$|n_+(0)\rangle, |n_-(0)\rangle$$

$$\langle n_+(0) | n_-(0) \rangle = 0$$

$$|n_{\pm}(1)\rangle = \exp(i\gamma_{\pm}) |n_{\pm}(0)\rangle$$



$$|n(0)\rangle = a_+ |n_+(0)\rangle + a_- |n_-(0)\rangle$$

$$|n(1)\rangle = a_+ e^{i\gamma_+} |n_+(0)\rangle + a_- e^{i\gamma_-} |n_-(0)\rangle$$

量子ゲート (時間発展演算子)

$$U = a_+ e^{i\gamma_+} |n_+(0)\rangle \langle n_+(0)| + a_- e^{i\gamma_-} |n_-(0)\rangle \langle n_-(0)|$$

安定な条件と動的位相

Cyclic states で期待値をとると…

$$\langle \mathbf{n}(0) | \sum_{j=1}^N R_N \dots R_{j+1} (H_j T_j R_j) \dots R_1 | \mathbf{n}(0) \rangle$$

$$= e^{-i\theta/2} \sum_{j=1}^N \langle \mathbf{n}(t_j) | H_j T_j | \mathbf{n}(t_j) \rangle$$

$$= e^{-i\theta/2} \sum_{j=1}^N \gamma_{d,j}$$

$$\sum_{j=1}^N \gamma_{d,j} = 0 \implies \tilde{R}(\mathbf{n}_0, \theta) = \underline{R(\mathbf{n}_0, \theta) (1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2))}$$

動的位相が 0



"pulse strength error" に対して安定

安定な条件と動的位相

Cyclic states で期待値をとると…

$$\langle \mathbf{n}(0) | \sum_{j=1}^N R_N \dots R_{j+1} (H_j T_j R_j) \dots R_1 | \mathbf{n}(0) \rangle$$

$$= e^{-i\theta/2} \sum_{j=1}^N \langle \mathbf{n}(t_j) | H_j T_j | \mathbf{n}(t_j) \rangle$$

$$= e^{-i\theta/2} \sum_{j=1}^N \gamma_{d,j}$$

$$\sum_{j=1}^N \gamma_{d,j} = 0 \implies \tilde{R}(\mathbf{n}_0, \theta) = \underline{R(\mathbf{n}_0, \theta) (1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2))}$$

動的位相が 0



"pulse strength error" に対して安定

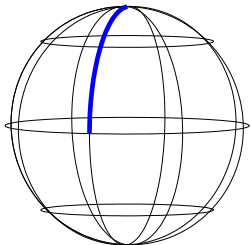
例

example

W1 sequence

単純量子ゲート

理想的な量子ゲート



$$R(x, \pi/2)$$

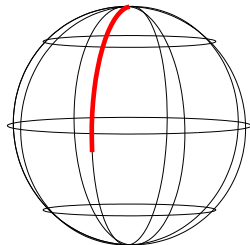
動的位相: $\gamma_d = -\theta/2$

幾何学的位相: $\gamma_g = 0$

実際には…



エラーのある量子ゲート



$$R(x, (1 + \epsilon)\pi/2)$$

W1 sequence

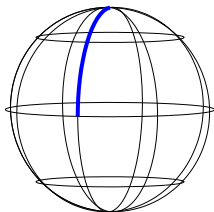
W1 sequence

$$R_{W1} = R(\mathbf{m}_1, \pi)R(\mathbf{m}_2, 2\pi)R(\mathbf{m}_1, \pi) = I$$

■ 単位行列になる

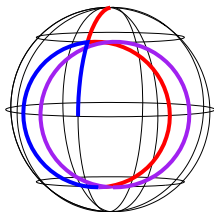
■ 位相が0 $\gamma = \gamma_d + \gamma_g = 0$

単純量子ゲート



$$R(\mathbf{x}, \pi/2)$$

複合量子ゲート



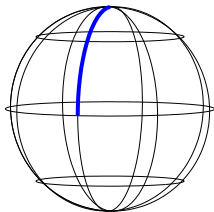
$$R(\mathbf{x}, \pi/4) R_{W1} R(\mathbf{x}, \pi/4)$$

W1 sequence

W1 sequence

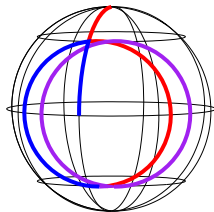
$$R_{W1} = R(\mathbf{m}_1, \pi)R(\mathbf{m}_2, 2\pi)R(\mathbf{m}_1, \pi) = I$$

単純量子ゲート



$$R(\mathbf{x}, \pi/2)$$

複合量子ゲート



$$R(\mathbf{x}, \pi/4) R_{W1} R(\mathbf{x}, \pi/4)$$

条件

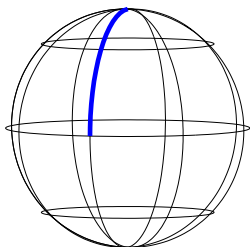
$$\phi_1 = \pm \arccos(-\theta/(4\pi)), \quad \phi_2 = 3\phi_1$$

$$\mathbf{m}_i = (\cos \phi_i, \sin \phi_i, 0)$$

W1 sequence

$$R_{W1} = e^{i\gamma_{W1}} |\mathbf{x}\rangle\langle\mathbf{x}| + e^{-i\gamma_{W1}} |-\mathbf{x}\rangle\langle-\mathbf{x}|$$

$$\gamma_{W1} = \gamma_{g,W1} + \gamma_{d,W1} = 0, \quad \underline{\gamma_{d,W1}} = -\gamma_{g,W1} = \underline{\theta/2}$$



$$R(\mathbf{x}, \theta)$$

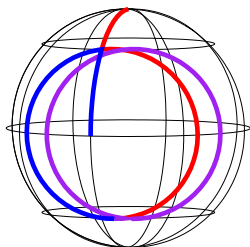
$$\gamma_d = -\theta/2$$

$$\gamma_g = 0$$



動的位相

幾何学的位相

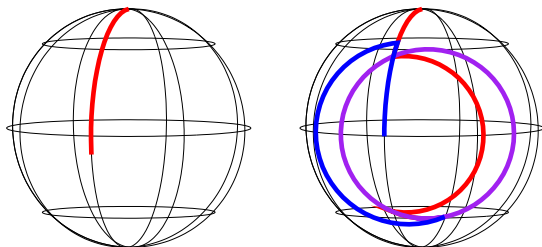


$$R(\mathbf{x}, \theta/2) R_{W1} R(\mathbf{x}, \theta/2)$$

$$\gamma_d = -\theta/2 + \underline{\theta/2} = 0$$

$$\gamma_g = -\theta/2$$

W1 sequence



θ に 10% のエラーがあるときの、
 90x ゲート及び W1 sequence による複合 90x ゲート。

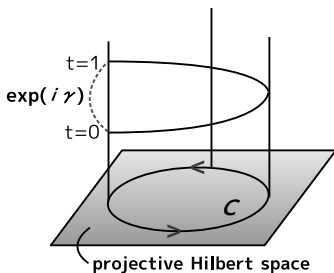
ずれの大きさ

$$1 - F = \begin{cases} 6.16 \times 10^{-3} & \text{(90x ゲート)} \\ 1.83 \times 10^{-6} & \text{(複合 90x ゲート)} \end{cases}$$

$$\text{operator fidelity: } F = \frac{|\text{tr}(\tilde{R}R^\dagger)|^2}{|\text{tr}(\tilde{R}\tilde{R}^\dagger)|^2}$$

pulse strength error と 位相

- 動的位相は時間に依存する。
- 幾何学的位相である Aharonov-Anandan 位相は、
 - projective Hilbert space の経路のみに依る。
 - その経路を辿るタイミングには依らない。



動的位相が 0 であれば

時間や振幅の系統的なエラーに対して感受性が低い。

Summary

- 幾何学的位相ゲートを含む、動的位相のない量子ゲートは pulse strength error に対して安定。
- pulse strength error に対して安定な量子ゲートを構成したいなら、動的位相を消せば良い。
- NMR で使われてきた多くの複合パルスは実は動的位相が 0 になっている。